

वर्ग एवं वर्गमूल

Square and Square Root

वर्ग Square

जब किसी संख्या की उसी संख्या से गुणा की जाती है, तो प्राप्त गुणनफल उस संख्या का वर्ग कहलाता है।

उदाहरण 5 का वर्ग = $5^2 = 5 \times 5 = 25$

वर्गमूल Square Root

किसी संख्या का वर्गमूल वह संख्या है जिसे अपने से गुणा करने पर दी गई संख्या प्राप्त होती है। इसे $\sqrt{\quad}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण 64 का वर्गमूल = $\sqrt{64} = 8$

कुछ महत्वपूर्ण वर्गमूल

(i) $\sqrt{2} = 1.414$

(ii) $\sqrt{3} = 1.732$

(iii) $\sqrt{5} = 2.236$

(iv) $\sqrt{6} = 2.449$

(v) $\sqrt{7} = 2.646$

(vi) $\sqrt{10} = 3.162$

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ

Methods to Find Out Square Root

वर्गमूल ज्ञात करने की निम्न दो विधियाँ हैं

1. गुणनखण्ड विधि एवं 2. भाग विधि

1. गुणनखण्ड विधि Factorization Method

- दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं।
- समान गुणनखण्डों के जोड़े बनाते हैं।
- प्रत्येक जोड़े में से एक गुणनखण्ड लेते हैं तथा लिए गये गुणनखण्डों की गुणा करते हैं।
- प्राप्त गुणनफल ही दी गई संख्या का वर्गमूल है।

जैसे $12544 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{12544} &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 112 \end{aligned}$$

2. भाग विधि Division Method

- दी गई संख्या के इकाई के अंक की ओर से दो-दो अंकों के जोड़े बनाये जाते हैं।
- बायीं ओर के सबसे पहले जोड़े या अंक में ऐसी संख्या से भाग देते हैं जिसका वर्ग उस जोड़े या अंक के बराबर हो या उससे कम हो। इसी संख्या को भाजक तथा भागफल के स्थान पर लिख देते हैं।
- शेषफल ज्ञात करके अगले जोड़े को शेषफल के दायीं ओर लिखते हैं।
- भागफल का दोगुना करके प्राप्त संख्या को भाजक के स्थान पर रखते हैं। भाजक में रखी गई संख्या के दायीं ओर एक ऐसा अंक लिखते हैं जिससे प्राप्त भाजक में गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल भाज्य के बराबर या उससे कम हो।
- प्राप्त गुणनफल को भाज्य के नीचे लिखकर शेषफल ज्ञात करते हैं तथा भाजक में रखे गये अंक को भागफल में लिख देते हैं।
- यह क्रिया तब तक करते हैं जब तक कि सब जोड़े समाप्त नहीं हो जाते। प्राप्त भागफल ही दी गई संख्या का अभीष्ट वर्गमूल है।

उदाहरण 190096 का वर्गमूल इस प्रकार ज्ञात करेंगे

हल

	436
4	<u>19 00 96</u>
	16
83	<u>300</u>
	249
866	<u>5196</u>
	5196
	0

$$\therefore \sqrt{190096} = 436$$

दशमलव भिन्नों के वर्गमूल ज्ञात करना

दिये गए दशमलव भिन्न में यदि दशमलव बिन्दु के बाद अंकों की संख्या सम नहीं है, तो अन्त में शून्य लगा देते हैं। अब दायीं ओर से दो-दो अंकों के जोड़े बनाते हैं और वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण $\sqrt{176.252176}$ का मान इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

हल

1	1 76. 25 21 76	13.276
	1	
23	76	
	69	
262	725	
	524	
2647	20121	
	18529	
26546	159276	
	159276	
	x	

अतः $\sqrt{176.252176} = 13.276$

महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- ♦ सम संख्या का वर्गमूल सम संख्या तथा विषम संख्या का वर्गमूल विषम संख्या होता है।
- ♦ एक से छोटी संख्या का वर्गमूल संख्या से बड़ा होता है।
- ♦ यदि किसी संख्या के अंकों की संख्या सम (माना m) हो, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या $\left(\frac{m}{2}\right)$ होती है।
- ♦ यदि किसी संख्या के अंकों की संख्या विषम (माना m) हो, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या $\left(\frac{m+1}{2}\right)$ होती है।
- ♦ यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या के इकाई के स्थान पर 1 हो, तो वर्गमूल में इकाई के स्थान पर 1 या 9; 4 हो, तो 2 या 8; 5 हो, तो 5; 6 हो, तो 4 या 6 तथा 9 हो, तो 3 या 7 होगा। जिस संख्या के अन्त में इकाई का अंक 2, 3 या 7 हो, तो वह संख्या पूर्ण वर्ग नहीं होगी।
- ♦ $\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots \dots \dots n \text{ बार} = x^{(2^n - 1)/2^n}$ ♦ $\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots \dots \dots \infty = x$

साधित उदाहरण

1. यदि $\frac{a}{\sqrt{0.25}} = 4$ हो, तो a का मान क्या होगा?

- (a) 0.2 (b) 0.02
(c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

हल (c) $a = \sqrt{0.25} \times 4$
 $= 0.5 \times 4 = 2.0$

2. वह छोटी-से-छोटी संख्या जिसे 678971 में जोड़ने पर पूर्ण वर्ग हो जाएगी, क्या होगी?

- (a) 3 (b) 4
(c) 5 (d) 6

हल (c) दी गई संख्या का वर्गमूल लेने पर ज्ञात होता है कि

$$(823)^2 < 678971 < (824)^2$$

$$\therefore \text{अभीष्ट संख्या} = (824)^2 - 678971$$

$$= 678976 - 678971 = 5$$

अतः जोड़ी जाने वाली संख्या 5 होगी।

3. 54 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा किया जाए कि गुणनफल पूर्ण घन हो जाए?

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

हल (c) $\because 54 = 3 \times 3 \times 3 \times 2$

अब चूँकि पूर्ण घन के लिए 2 की संख्याएँ तीन होनी चाहिए अतः

$(3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2)$ में $2 \times 2 = 4$ की आवश्यकता है।

अभ्यास प्रश्न

1. $\frac{112}{\sqrt{196}} \times \frac{\sqrt{576}}{12} \times \frac{\sqrt{256}}{8}$ का सरलीकृत मान है

- (a) 12 (b) 8 (c) 16 (d) 32

2. यदि $\frac{x}{\sqrt{0.04}} = 6$ हो, तो x का मान क्या होगा?

- (a) 0.3 (b) 3
(c) 12 (d) 1.2

3. $\sqrt{18} - \sqrt{98} + \sqrt{50}$ का मान क्या होगा?

- (a) 1.414 (b) 4.141
(c) 1.732 (d) 2.000

4. $\sqrt{128} + \sqrt{160} - \sqrt{16}$ का मान क्या होगा?

- (a) 17.96 (b) 16.66
(c) 19.96 (d) 18.86

5. $\sqrt{949} + \sqrt{130} + \sqrt{196}$ बराबर है

- (a) 30 (b) 31
(c) 32 (d) 33

6. यदि $\sqrt{1 + \frac{25}{144}} = 1 + \frac{x}{12}$ हो, तो x का मान बराबर है

- (a) 1 (b) 2 (c) 5 (d) 9

7. यदि $\sqrt{x} + 238 = 360$ का $\frac{4}{5}$ हो, तो x का मान है

- (a) 2500 (b) 3025 (c) 3600 (d) 6400

8. यदि $\frac{\sqrt{32.4}}{\sqrt{x}} = 2$ हो, तो x का मान है

- (a) 9 (b) 0.9
(c) 0.09 (d) इनमें से कोई नहीं

9. एक सेना के 195000 सैनिकों को ठोस वर्ग में खड़ा करने पर यह ज्ञात हुआ कि 519 सैनिक बच जाते हैं। ज्ञात कीजिए प्रत्येक पंक्ति में कितने सैनिक खड़े किए गए थे?

- (a) 490 (b) 441 (c) 445 (d) 451

10. $\sqrt{10 + \sqrt{25 + \sqrt{108 + \sqrt{154 + \sqrt{225}}}}}$ का मान है

- (a) 10 (b) 8 (c) 6 (d) 4

11. 294 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि प्राप्त संख्या एक पूर्ण वर्ग हो?

- (a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 24

12. 1470 को किस छोटी-से-छोटी संख्या से भाग दिया जाये कि प्राप्त भागफल एक पूर्ण वर्ग हो?

- (a) 6 (b) 5 (c) 15 (d) 30

13. 5 अंकों की बड़ी-से-बड़ी वह कौन-सी संख्या है, जो एक पूर्ण वर्ग हो?

- (a) 99999 (b) 99764
(c) 99976 (d) 99856

14. छात्रों के एक समूह में प्रत्येक छात्र से उतने ही पैसे लिये गये जितने इस समूह में छात्र थे। यदि कुल धन ₹ 59.29 एकत्र हुआ हो, तो समूह में कितने छात्र थे?

- (a) 67 (b) 77
(c) 87 (d) 57

15. किसी संख्या के वर्ग का $\frac{3}{5}$, 126.15 है। वह संख्या क्या है?

- (a) 210.25 (b) 75.69
(c) 14.5 (d) 145

16. वह छोटी-से-छोटी संख्या जिसे 680621 में जोड़ने पर योग एक पूर्ण वर्ग बन जाता है, निम्न है

- (a) 4 (b) 5
(c) 6 (d) 8

17. $-\sqrt{32} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$ का दशमलव के शुद्ध तीन अंकों तक मान है

- (a) -1.732 (b) -1.141
(c) -1.414 (d) -1.441

18. $(7 + 3\sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})$ का वर्गमूल है

- (a) 4 (b) $\sqrt{5}$ (c) $3\sqrt{5}$ (d) 2

19. वह कौन-सी न्यूनतम संख्या है जिसे 0.000326 में से घटाने पर एक पूर्ण वर्ग प्राप्त होगा?

- (a) 0.000004 (b) 0.000002
(c) 0.04 (d) 0.02

20. $\sqrt{\frac{0.00001225}{0.00005329}}$ बराबर है

- (a) $\frac{25}{77}$ (b) $\frac{35}{73}$
(c) $\frac{35}{77}$ (d) $\frac{25}{73}$

21. यदि $\sqrt{2} = 1.414$, तो $\sqrt{8} + 2\sqrt{32} - 3\sqrt{128} + 4\sqrt{50}$ का मान है

- (a) 8.484 (b) 8.526
(c) 8.426 (d) 8.876

22. $\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$ का मान है

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 8

23. $\sqrt{(0.798)^2 + 0.404 \times 0.798 + (0.202)^2} + 1$ बराबर है

- (a) 0 (b) 2
(c) 1.596 (d) 0.404

24. यदि $\frac{50}{x} = \frac{x}{12\frac{1}{2}}$ हो, तो x का मान है

- (a) 25/2 (b) 4/25 (c) 4 (d) 25

उत्तरमाला

1.	(d)	2.	(d)	3.	(a)	4.	(c)	5.	(b)	6.	(a)	7.	(a)	8.	(d)	9.	(b)	10.	(d)
11.	(c)	12.	(d)	13.	(d)	14.	(b)	15.	(c)	16.	(a)	17.	(c)	18.	(d)	19.	(b)	20.	(b)
21.	(a)	22.	(b)	23.	(b)	24.	(d)												

संकेत एवं हल

$$1. \frac{112}{\sqrt{196}} \times \frac{\sqrt{576}}{12} \times \frac{\sqrt{256}}{8} = \frac{112}{14} \times \frac{24}{12} \times \frac{16}{8}$$

$$= 8 \times 2 \times 2 = 32$$

$$2. \frac{x}{\sqrt{0.04}} = 6 \Rightarrow \frac{x}{0.2} = 6 \Rightarrow x = 1.2$$

$$3. \sqrt{18} - \sqrt{98} + \sqrt{50} = \sqrt{3 \times 3 \times 2} - \sqrt{7 \times 7 \times 2} + \sqrt{5 \times 5 \times 2}$$

$$= 3\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1.414$$

$$5. \sqrt{949} + \sqrt{130} + \sqrt{196} = \sqrt{949} + \sqrt{130 + 14}$$

$$= \sqrt{949} + \sqrt{144} = \sqrt{949 + 12} = \sqrt{961} = 31$$

$$7. \sqrt{x} + 238 = 360 \times \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 238 = 288$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 50$$

$$\Rightarrow x = 2500$$

$$8. \frac{\sqrt{32.4}}{\sqrt{x}} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{32.4}{x} = 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{32.4}{4} = 8.1$$

9. अभीष्ट पंक्तियों की संख्या = $195000 - 519 = 194481$ का वर्गमूल

	441
4	19 44 81
	16
84	344
	336
881	881
	881
	xxx

∴ पंक्तियों की कुल संख्या 441 होगी।

$$11. \because 294 = 7 \times 7 \times 3 \times 2$$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि 294 में 6 से गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग बन जाएगा।

$$14. \text{माना छात्रों की संख्या} = x$$

$$\text{प्रत्येक छात्र द्वारा दिये गये पैसे} = x$$

$$\therefore \text{कुल धन} = ₹ 59.29$$

$$\Rightarrow x^2 = 5929 \text{ पैसे}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{5929} = 77$$

15. माना संख्या x है।

$$x^2 \times \frac{3}{5} = 126.15$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{126.15 \times 5}{3} = 210.25$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{210.25} = 14.5$$

$$18. \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})} = \sqrt{7^2 - (3\sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2$$

$$21. \sqrt{8} + 2\sqrt{32} - 3\sqrt{128} + 4\sqrt{50}$$

$$= 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 20\sqrt{2}$$

$$= 30\sqrt{2} - 24\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$= 6 \times 1.414 = 8.484$$

$$22. \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8\sqrt{4 + 3 + 4\sqrt{3}}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8(2 + \sqrt{3})}} = \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{19 + 8\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{16 + 3 + 8\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{(4 + \sqrt{3})^2}}$$

$$= \sqrt{-\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$$