अध्याय 6

घातांक एवं करणी

Indices and Surds

घातांक Indices

यदि a कोई शून्येत्तर पूर्णांक को m बार गुणा किया जाए, जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है, तो a का m घात प्राप्त होगा, जिसे a^m से निरूपित किया जाता है।

माना a एक वास्तविक संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है, तब

$$a \times a \times a \ldots\ldots m \text{ बार} = a^m$$

इसे a की घात m पढ़ा जाता है। इसमें a को **आधार** तथा m को **घातांक** कहते हैं।

उदाहरण $\left(\frac{a^y}{a^z}\right)^{\frac{1}{yz}} \cdot \left(\frac{a^z}{a^x}\right)^{\frac{1}{zx}} \cdot \left(\frac{a^x}{a^y}\right)^{\frac{1}{xy}}$ को सरल कीजिए।

हल दिए गए व्यंजक से $= (a^{y-z})^{\frac{1}{yz}} \cdot (a^{z-x})^{\frac{1}{zx}} \cdot (a^{x-y})^{\frac{1}{xy}}$

$$= a^{\frac{y-z}{yz}} \cdot a^{\frac{z-x}{zx}} \cdot a^{\frac{x-y}{xy}} = a^{\frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx} + \frac{x-y}{xy}}$$

$$= a^{\frac{xy-xz+yz-yx+xz-yz}{xyz}}$$

$$= a^0 = 1$$

करणी Surds

वे राशियाँ जिनका सटीक (exact) मान नहीं निकाला जा सकता, करणी कहलाती हैं।

माना a एक परिमेय संख्या है तथा m एक धन पूर्णांक है। यदि $a^{1/m}$ एक अपरिमेय संख्या हो, तो $a^{1/m}$ को m घात की करणी कहते हैं।

$a^{1/m} = \sqrt[m]{a} = a$ का mवाँ मूल

महत्त्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- किसी द्विपद द्विघात करणी तथा उसके संयुग्मी का गुणनफल सदैव एक परिमेय संख्या होती हैं।
- किसी द्विपद द्विघात करणी का परिमेयकारी गुणक उस करणी का संयुग्मी होता है अर्थात् $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ होता है।
- समान घात की करणियों का ही योग व अन्तर ज्ञात किया जा सकता है।
- असमान घात की करणियों की गुणा तथा भाग करते समय उनकी घात समान बनायी जाती हैं।
- यदि $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ हों, तब $a = c$ तथा $b = d$ होता है।
- $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{a - b}$
- $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a + b}$
- $a^0 = 1$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(b^m)^n = b^{mn}$
- $a^{-n} = a^{\frac{1}{n}}$
- यदि $a^m = b^m$ हो, तो $a = b$ या $m = 0$
- यदि $b^x = b^y$ हो, तो $x = y$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Studyandupdates

साधित उदाहरण

1. $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left[\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]$ का मान है

(a) 1 (b) 3 (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{4}{3}$

हल (a) $\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} \times \left[\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]$

$= \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left[\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2}{5}\right)^{3}\right]$

$= \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left[\left(\frac{3^2}{5^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{125}\right]$

$= \frac{8}{27} \times \left[\frac{27}{125} \times \frac{125}{8}\right] = \frac{8}{27} \times \frac{27}{125} \times \frac{125}{8} = 1$

2. यदि $10^{0.48} = x, 10^{0.7} = y$ एवं $x^z = y^2$ हो, तो z का मान है

(a) $1\frac{11}{12}$ (b) $2\frac{11}{12}$ (c) $3\frac{11}{12}$ (d) $-2\frac{11}{12}$

हल (b) $10^{0.48} = x, 10^{0.7} = y$

$\because \quad x^z = y^2$

$\Rightarrow \quad (10^{0.48})^z = (10^{0.7})^2 \Rightarrow 10^{0.48z} = 10^{1.4}$

$0.48z = 1.4$

$\Rightarrow \quad z = \frac{1.4}{0.48} = \frac{140}{48} = 2\frac{11}{12}$

3. $\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{10}, \sqrt[12]{25}$ का सही अवरोही क्रम है

(a) $\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{10}, \sqrt[12]{25}$ (b) $\sqrt[6]{10}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[12]{25}$

(c) $\sqrt[12]{25}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{10}$ (d) $\sqrt[12]{25}, \sqrt[6]{10}, \sqrt[4]{3}$

हल (b) यहाँ करणियों की घात 4, 6 व 12 हैं।

4, 6 व 12 का ल.स. = 12

अत: $\sqrt[4]{3} = (3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4\times 3}} = 3^{\frac{3}{12}} = (3^3)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{27}$

इसी प्रकार, $\sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$

$\sqrt[12]{25} = \sqrt[12]{25}$

$\therefore$ अवरोही क्रम $= \sqrt[12]{100}, \sqrt[12]{27}, \sqrt[12]{25} = \sqrt[6]{10}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[12]{25}$

4. $7\sqrt{3} + 5\sqrt{27} + \frac{2}{\sqrt{3}}$ का सरलीकृत मान है

(a) $\frac{78\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{68\sqrt{3}}{3}$

(c) $\frac{58\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{48\sqrt{3}}{3}$

हल (b) $7\sqrt{3} + 5\sqrt{27} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= 7\sqrt{3} + 5\sqrt{9\times 3} + \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$= 7\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$= \left(7 + 15 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{3}$

$= \left(\frac{21+45+2}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{68}{3}\sqrt{3}$

अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित प्रश्न में प्रश्नचिह्न (?) के स्थान पर क्या आना चहिए?

$31^{7.5} \div 31^{3/2} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^?$

(a) 9/2 (b) 6

(c) 7/2 (d) 4

2. $\sqrt{129 + \sqrt{216 + \sqrt{68 + \sqrt{169}}}}$ का मान निकालें।

(a) 13 (b) 15

(c) 9 (d) 12

3. $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$ किसके बराबर है?

(a) 5 (b) 3

(c) 1 (d) 0

4. निम्नलिखित व्यंजक में m का मान क्या है?

$\frac{\sqrt{3+m} + \sqrt{3-m}}{\sqrt{3+m} - \sqrt{3-m}} = 2$

(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{12}{5}$

5. यदि $(64)^{2/3} \times (16)^{-1/2} = 4^n$ हो, तो n का मान है

(a) 1 (b) 0 (c) 27 (d) 81

6. यदि $\frac{(p^3)^2 \times p^4}{p^{10}} = p^r$ हो, तो r का मान है

(a) 26 (b) 2 (c) 1 (d) 0

7. यदि $[3^{m^2} \div (3^m)^2]^{1/m} = 81$ हो, तो m का मान है

(a) 3 (b) 6

(c) -3 (d) -6

8. यदि $2\sqrt{2} \times 2^3 \div 2^{-3/2} = 2^{a+2}$ हो, तो a का मान है

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

Studyandupdates

9. $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} + 2^{-3}$ का मान है

(a) 2^{n+1} (b) $-2^{n+1} + \frac{1}{8}$

(c) $\frac{9}{8} - 2^n$ (d) 1

10. यदि $\frac{9^n \times 3^5 \times (27)^3}{3 \times (81)^4} = 27$ हो, तो n बराबर है

(a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 4

11. यदि $(\sqrt{3})^5 \times 9^2 = 3^x \times 3\sqrt{3}$ हो, तब x बराबर है

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

12. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = 3$ हो, तो x का मान है

(a) 125 (b) 64 (c) 27 (d) 9

13. यदि $a^x = b^y = c^z$ तथा $b^2 = ac$ हो, तो y बराबर है

(a) $\frac{xz}{x+z}$ (b) $\frac{xz}{2(x-z)}$ (c) $\frac{xz}{2(z-x)}$ (d) $\frac{2xz}{x+z}$

14. $\frac{3^{n+2} - 3^n}{3^{n+1} + 3^n}$ का मान है, जहाँ n एक वास्तविक संख्या है

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 0

15. $64^{2/3} + 27^{4/3} - 9^{3/2}$ का मान है

(a) 24 (b) 70 (c) 75 (d) 81

16. $(900)^{1/2} \times (0.027)^{1/3} - (0.0081)^{1/4} \times 3^0 + (5/4)^{-1}$ का मान है

(a) 12 (b) 9.50 (c) 8.75 (d) 9.05

17. यदि $4^x - 4^{x-1} = 24$ हो, तो $(2x)^x$ का मान है

(a) 25 (b) 125 (c) $\sqrt{5}$ (d) $25\sqrt{5}$

18. $(x^n\ y^{-m})^3 \times (x^3 y^2)^{-n}$ का मान है

(a) yx^{3m+2n} (b) y^{3m+2n}

(c) y^{-3m+2n} (d) $y^{-(3m+2n)}$

19. $(x^5)^{-3/5} \times (b^{5/3})^{-3/4} \times (c^0)^{3/16}$ का मान होगा

(a) 0 (b) 1

(c) $x^{-3}\ b^{-5/4}$ (d) इनमें से कोई नहीं

20. $\left\{\left(\sqrt[3]{(81)^2}\right)^{3/2}\right\}^{1/4}$ का मान है

(a) 81 (b) 27 (c) 9 (d) 3

21. 166375 का घनमूल 55 है, तो

$\sqrt[3]{166.375} + \sqrt[3]{0.166375} + \sqrt[3]{0.000166375}$ का मान होगा

(a) 6.051 (b) 6.105 (c) 6.501 (d) 6.015

22. यदि $\frac{3^5 \times 9^6 \times 81^{x+1}}{3 \times 3\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$ हो, तो x का मान है

(a) -3 (b) -2 (c) -4 (d) -1

23. $(243)^{0.16} \times (243)^{0.04}$ का मान है

(a) 3 (b) 9 (c) 48.3 (d) 243.2

24. $[1 - 2(1-2)^{-1}]^{-1}$ का मान बराबर है

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

25. यदि $2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$ हो, तो x का मान है

(a) 6 (b) 8 (c) 5 (d) 7

26. यदि $2^x = 4^y = 8^z$ तथा $\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{6z}\right) = \frac{24}{7}$ हो, तो z का मान है

(a) $\frac{7}{16}$ (b) $\frac{7}{32}$ (c) $\frac{7}{48}$ (d) $\frac{7}{64}$

27. $(64)^{-2/3}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ का मान है

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{16}$

उत्तरमाला

1.	(b)	**2.**	(d)	**3.**	(a)	**4.**	(d)	**5.**	(a)	**6.**	(d)	**7.**	(b)	**8.**	(a)	**9.**	(d)	**10.**	(c)
11.	(d)	**12.**	(b)	**13.**	(d)	**14.**	(a)	**15.**	(b)	**16.**	(b)	**17.**	(d)	**18.**	(d)	**19.**	(c)	**20.**	(d)
21.	(b)	**22.**	(c)	**23.**	(a)	**24.**	(a)	**25.**	(d)	**26.**	(c)	**27.**	(a)						

संकेत एवं हल

1. $31^{7.5} + 31^{3/2} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^?$

$\Rightarrow 31^{7.5} + 31^{1.5} \times 31^{-3} = (\sqrt{31})^?$

$\Rightarrow 31^{7.5-1.5-3} = (\sqrt{31})^? \Rightarrow 31^3 = (31)^{?/2}$

$\Rightarrow \frac{?}{2} = 3 \Rightarrow ? = 6$

2. $\sqrt{129 + \sqrt{216 + \sqrt{68 + \sqrt{169}}}}$

$= \sqrt{129 + \sqrt{216 + \sqrt{68 + 13}}} = \sqrt{129 + \sqrt{216 + \sqrt{81}}}$

$= \sqrt{129 + \sqrt{216 + 9}} = \sqrt{129 + \sqrt{225}} = \sqrt{129 + 15}$

$= \sqrt{144} = 12$

3. $\frac{1}{3 - \sqrt{8}} = \frac{1}{3 - \sqrt{8}} \times \frac{3 + \sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}} = (3 + \sqrt{8})$

$\therefore \frac{1}{3 - \sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8} - \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$

$= (3 + \sqrt{8}) - (\sqrt{8} + \sqrt{7}) + (\sqrt{7} + \sqrt{6})$

$- (\sqrt{6} + \sqrt{5}) + (\sqrt{5} + 2)$

Studyandupdates

$= 3 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2$

$= 3 + 2 = 5$

5. $(64)^{2/3} \times (16)^{-1/2} = 4^n$

$\Rightarrow \quad (4^3)^{2/3} \times (4^2)^{-1/2} = 4^n$

$\Rightarrow \quad 4^2 \times 4^{-1} = 4^n$

$4^1 = 4^n$

$\therefore \quad n = 1$

6. $\dfrac{(p^3)^2 \times p^4}{p^{10}} = p^r$

$\Rightarrow \quad \dfrac{p^6 \times p^4}{p^{10}} = p^r \Rightarrow \dfrac{p^{10}}{p^{10}} = p^r$

$\Rightarrow \quad p^r = p^0 \Rightarrow r = 0$

7. $\left[3^{m^2} \div (3^m)^2\right]^{1/m} = 81 \Rightarrow \left[\dfrac{3^{m^2}}{3^{2m}}\right]^{1/m} = 3^4$

$\Rightarrow \quad 3^{m^2 - 2m} = 3^{4m} \Rightarrow m^2 - 2m = 4m$

$\Rightarrow \quad m^2 - 6m = 0 \Rightarrow m(m - 6) = 0$

$\Rightarrow \quad m = 0, 6$

$m = 0$ के लिए समीकरण परिभाषित नहीं है अत: $m = 6$

8. $2\sqrt{2} \times 2^3 \div 2^{-3/2} = 2^{a+2} \Rightarrow \dfrac{2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^3}{2^{-3/2}} = 2^{a+2}$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot 2^{1/2} \cdot 2^3 \cdot 2^{3/2} = 2^{a+2}$

$\Rightarrow \quad 2^{1 + 1/2 + 3 + 3/2} = 2^{a+2}$

$\Rightarrow \quad 2^6 = 2^{a+2} \Rightarrow 6 = a + 2 \Rightarrow a = 4$

9. $\dfrac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} + 2^{-3} = \dfrac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} + \dfrac{1}{2^3}$

$= \dfrac{2^n (16 - 2)}{2^n (16)} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{14}{16} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{14 + 2}{16} = \dfrac{16}{16} = 1$

12. $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} = 3 \Rightarrow 5 + \sqrt[3]{x} = 9$

$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = 4 \Rightarrow x = 64$

13. माना $a^x = b^y = c^z = k$

$\Rightarrow \quad a = k^{1/x}, b = k^{1/y}$ तथा $c = k^{1/z}$

तथा $b^2 = ac$

$\Rightarrow \quad k^{2/y} = k^{1/x} \cdot k^{1/z}$

$\Rightarrow \quad k^{2/y} = k^{1/x + 1/z}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} \Rightarrow \dfrac{2}{y} = \dfrac{z + x}{xz} \Rightarrow y = \dfrac{2xz}{x + z}$

15. $64^{2/3} + 27^{4/3} - 9^{3/2}$

$= (4^3)^{2/3} + (3^3)^{4/3} - (3^2)^{3/2}$

$= 4^2 + 3^4 - 3^3 = 16 + 81 - 27 = 70$

17. $4^x - 4^{x-1} = 24$

$\Rightarrow \quad 4^x - 4^x \cdot 4^{-1} = 24$

$\Rightarrow \quad 4^x \left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 24 \Rightarrow 4^x \left(\dfrac{3}{4}\right) = 24 \Rightarrow 4^x = \dfrac{24 \times 4}{3}$

$\Rightarrow \quad 4^x = 2^5$

$\Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

अब $(2x)^x = (5)^{5/2} = 25\sqrt{5}$

18. $(x^n y^{-m})^3 \times (x^3 y^2)^{-n}$

$= x^{3n} \cdot y^{-3m} \cdot x^{-3n} \cdot y^{-2n}$

$= x^{3n - 3n} \cdot y^{-3m - 2n} = y^{-(3m + 2n)}$

22. $\dfrac{3^5 \times 9^6 \times 81^{x+1}}{3 \times 3\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{3^5 \times 3^{12} \times 3^{4x+4}}{3 \times 3 \times 3^{1/2}} = 3^2 \times 3^{1/2}$

$\Rightarrow \quad 3^{5 + 12 + 4x + 4 - 2 - \frac{1}{2}} = 3^{2 + \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{37}{2} + 4x = \dfrac{5}{2} \Rightarrow 4x = \dfrac{5}{2} - \dfrac{37}{2} = -\dfrac{32}{2}$

$\Rightarrow \quad 4x = -16$

$\Rightarrow \quad x = -4$

23. $(243)^{0.16} \times (243)^{0.04}$

$= (243)^{0.16 + 0.04} = (243)^{0.20} = (3^5)^{1/5} = 3$

24. $[1 - 2(1 - 2)^{-1}]^{-1} = \left[1 - \dfrac{2}{-1}\right]^{-1} = [1 + 2]^{-1} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

25. $2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$

$\Rightarrow \quad 2^x \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot 2^x = 320 \Rightarrow 2^x \cdot \dfrac{5}{2} = 320$

$\Rightarrow \quad 2^x = \dfrac{320 \times 2}{5} \Rightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7$

$\Rightarrow \quad x = 7$

26. $2^x = 4^y = 8^z$

माना $2^x = 2^{2y} = 2^{3z} = 2^k$

$x = k, 2y = k, 3z = k$

$\Rightarrow \quad x = k, y = \dfrac{k}{2}, z = \dfrac{k}{3}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4y} + \dfrac{1}{6z}\right) = \left(\dfrac{1}{2 \cdot k} + \dfrac{1}{4 \cdot k/2} + \dfrac{1}{6 \cdot k/3}\right)$

$= \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k} + \dfrac{1}{2k} = \dfrac{3}{2k}$

परन्तु $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4y} + \dfrac{1}{6z} = \dfrac{24}{7}$

$\therefore \quad \dfrac{3}{2k} = \dfrac{24}{7}$

$k = \dfrac{3 \times 7}{2 \times 24} = \dfrac{7}{2 \times 8} = \dfrac{7}{16}$

$z = \dfrac{k}{3} = \dfrac{7}{16 \times 3} = \dfrac{7}{48}$

27. $(64)^{-2/3} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = (4^3)^{-2/3} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = (4)^{-2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = 1$

Studyandupdates