

# अध्याय 16

## क्षेत्रफल एवं परिमाण

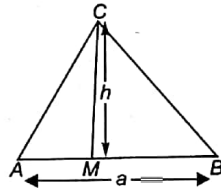
### Area and Perimeter

प्रत्येक ज्यामितीय आकृति का कुछ न कुछ क्षेत्र होता है। इस प्रकार, किसी आकृति की सीमाओं द्वारा जो क्षेत्र घिरा होता है, वह उसका क्षेत्रफल कहलाता है।

विभिन्न आकृतियों के क्षेत्रफल तथा परिमाणों का संक्षिप्त विवरण निम्नवत् है

#### त्रिभुज Triangle

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &= \frac{1}{2} \times a \times h \end{aligned}$$



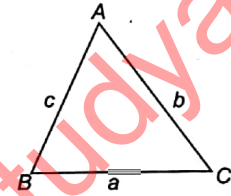
#### विषमबाहु त्रिभुज Scalene Triangle

$$\text{त्रिभुज का परिमाण} = a + b + c$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{जहाँ } s = \frac{a+b+c}{2}$$



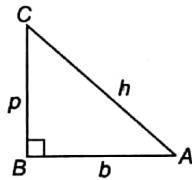
#### समकोण त्रिभुज Right Angled Triangle

$$\text{समकोण त्रिभुज का परिमाण} = p + b + h$$

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{लम्ब}$$

$$= \frac{1}{2} \times b \times p$$



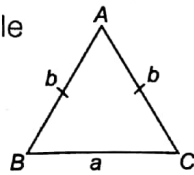
#### समद्विबाहु त्रिभुज Isosceles Triangle

समद्विबाहु त्रिभुज का परिमाण

$$= 2b + a$$

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= (s-b) \sqrt{s(s-a)}$$



#### समबाहु त्रिभुज Equilateral Triangle

समबाहु त्रिभुज का परिमाण =  $3a$

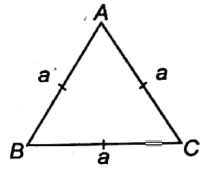
समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{\sqrt{3}}{3} (\text{माध्यिका})^2$

(∵ समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई ही उसकी माध्यिका होती है।)

समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई =  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$



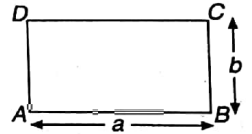
#### आयत Rectangle

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई =  $a \times b$

आयत का परिमाण =  $2(\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई})$

$$= 2(a+b)$$

आयत का विकर्ण =  $\sqrt{a^2 + b^2}$



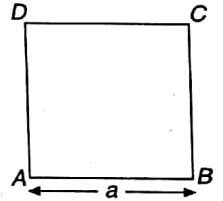
#### वर्ग Square

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)<sup>2</sup> =  $a^2$

वर्ग का परिमाण =  $4 \times \text{भुजा} = 4a$

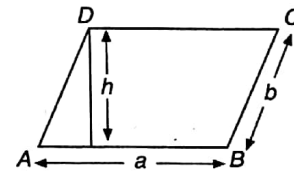
वर्ग का विकर्ण =  $a\sqrt{2}$

वर्ग का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} (\text{विकर्ण})^2$



#### समान्तर चतुर्भुज Parallelogram

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई =  $a \times h$



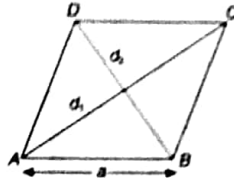
समान्तर चतुर्भुज का परिमाण =  $2(a+b)$

### समचतुर्भुज Rhombus

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

समचतुर्भुज की एक भुजा =  $\frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

समचतुर्भुज का परिमाण =  $4 \times$  भुजा  
 $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$



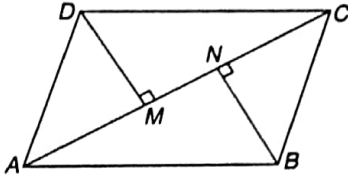
### समलम्ब Trapezium

समलम्ब का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} (a + b) \times h$



### चतुर्भुज Quadrilateral

चतुर्भुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times AC \times (DM + BN)$



### बहुभुज Polygon

समतल आकृति को जो  $n$  रेखाखण्डों से परिवद्ध (घिरा) हो  $n$ -भुजाओं वाला बहुभुज कहते हैं। इस प्रकार, त्रिभुज तीन भुजाओं वाला बहुभुज, चतुर्भुज चार भुजाओं वाला बहुभुज, पंचभुज तथा षट्भुज क्रमशः पाँच भुजाओं तथा छः भुजाओं वाले बहुभुज हैं।

यदि बहुभुज की सभी भुजाएँ तथा कोण बराबर हों, तो उसे समबहुभुज कहते हैं।

### समबहुभुज Regular Polygon

समबहुभुज की विशेषता है, कि

- (i) उसके अन्तर्गत एक वृत्त बना सकते हैं, तथा
- (ii) उसके परिगत एक वृत्त खींच सकते हैं।

समबहुभुज का केन्द्र उसके अन्तर्गत एवं बहिर्गत वृत्तों के केन्द्र, एक ही बिन्दु होते हैं।

समपंचभुज का क्षेत्रफल =  $5a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

समषट्भुज का क्षेत्रफल =  $6a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

### वृत्त Circle

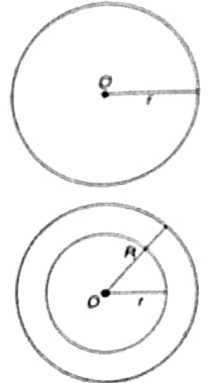
वृत्त का क्षेत्रफल =  $\pi r^2$

वृत्त की परिधि =  $2\pi r$

वृत्त का व्यास =  $2r$

वृत्त के चाप की लम्बाई,  $l = \frac{\pi r \theta}{180^\circ}$

वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल =  $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$



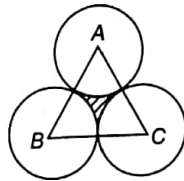
### वृत्ताकार वलय Circular Ring

वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल =  $\pi (R^2 - r^2)$

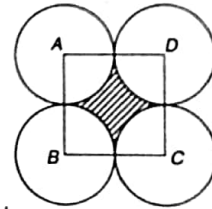
दोनों वलयों की परिधियों का अन्तर =  $2\pi R - 2\pi r$

### महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

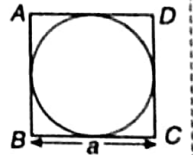
- 'a' भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अन्तःवृत्त की त्रिज्या  $\frac{a}{2\sqrt{3}}$  होती है तथा अन्तःवृत्त का क्षेत्रफल  $\frac{\pi a^2}{12}$  होता है।
- 'a' भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  होती है तथा परिवृत्त का क्षेत्रफल  $\frac{\pi a^2}{3}$  होता है।
- कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल =  $2 \times (\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई}) \times \text{ऊँचाई}$
- यदि आयत व वर्ग का परिमाण समान हो, तो सदैव वर्ग का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल से अधिक होता है। यदि दो वर्गों के क्षेत्रफलों में  $A_1 : A_2$  का अनुपात हो, तो उनके परिमाणों में  $\sqrt{A_1} : \sqrt{A_2}$  का अनुपात होता है।
- समान्तर चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण चतुर्भुज को दो समान क्षेत्रफल के त्रिभुजों में विभाजित करता है।
- समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- यदि  $r$  त्रिज्या के तीन वृत्त एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष पर बने हो तथा एक-दूसरे को स्पर्श करते हों, तो उनके बीच घिरे भाग का क्षेत्रफल  $r^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right)$  होता है।
- यदि  $r$  त्रिज्या के चार वृत्त परस्पर एक-दूसरे को स्पर्श करते हो, तो



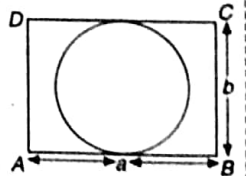
उनके बीच घिरे भाग का क्षेत्रफल  $r^2 (4 - \pi)$  होता है।



- भुजा  $a$  वाले वर्ग के अन्तर्गत खींचे जाने वाले अधिकतम त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल  $\frac{\pi a^2}{4}$  होता है।



- लम्बाई  $a$  तथा चौड़ाई  $b$  के आयत के अन्तर्गत खींचे जाने वाले अधिकतम त्रिज्या के वृत्त की त्रिज्या तथा क्षेत्रफल क्रमशः  $\frac{b}{2}$  तथा  $\frac{\pi b^2}{4}$  होता है। (जहाँ  $a > b$ )



- यदि किसी आकृति की प्रत्येक भुजा को  $n$  गुना कर दिया जाए, तो उसके क्षेत्रफल में  $(n^2 - 1) \times 100\%$  की प्रतिशत वृद्धि होती है।
- यदि किसी आकृति की एक भुजा को  $m$  गुना तथा दूसरी भुजा को  $n$  गुना कर दिया जाए, तो क्षेत्रफल में  $(mn - 1) \times 100\%$  की प्रतिशत वृद्धि होती है।
- यदि किसी आकृति की प्रत्येक भुजा में  $\pm x\%$  परिवर्तन करने पर उसके क्षेत्रफल में  $\left( 2x \pm \frac{x^2}{100} \right) \%$  परिवर्तन होता है।

## साधित उदाहरण

1. किसी समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल  $400\sqrt{3}$  वर्ग मी है। इसका परिमाण है

- (a) 120 मी (b) 150 मी (c) 90 मी (d) 135 मी

हल (a) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल  $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$400\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow a^2 = 400 \times 4$$

$$a = 40 \text{ मी}$$

अतः परिमाण  $= 3a = 120$  मी

2. किसी पहिए का व्यास 3 मी है। यह पहिया 1 मिनट में 28 चक्कर लगाता है। 5.280 किमी की दूरी चलने में यह पहिया निम्न समय लेगा

- (a) 10 मिनट (b) 20 मिनट (c) 30 मिनट (d) 40 मिनट

हल (b) पहिए द्वारा एक चक्कर में चली दूरी = पहिए की परिधि  
 $= 3\pi = 9.42$  मी

28 चक्कर लगाने में चली दूरी  $= 28 \times 9.42 = 263.76$  मी

263.76 मी दूरी चलने में लगा समय = 1 मिनट

5280 मी दूरी चलने में लगा समय  $= \frac{5280}{263.76} = 20$  मिनट (लगभग)

3. एक पहिया 2 किमी 26 डेकामी की दूरी तय करने में 113 चक्कर लगाता है, पहिए का व्यास है

- (a)  $4\frac{4}{13}$  मी (b)  $6\frac{4}{11}$  मी (c)  $12\frac{4}{11}$  मी (d)  $12\frac{8}{11}$  मी

हल (b) माना पहिए का व्यास  $2r$  मी है।

कुल दूरी = 2 किमी 26 डेकामी  
 $= 2000 + 260 = 2260$  मी

पहिया 1 चक्कर लगाने पर  $2\pi r$  दूरी चलता है।

अतः 113 चक्कर लगाने पर चली दूरी  $= 113 \times 2\pi r$

$$2260 = 113 \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\therefore 2r = \frac{2260 \times 7}{113 \times 22} = 6\frac{4}{11} \text{ मी}$$

## अभ्यास प्रश्न

1. यदि दो वर्गों के क्षेत्रफलों का अनुपात 1 : 4 है, तो उनके परिमाणों का अनुपात है

- (a) 1 : 6 (b) 1 : 8 (c) 1 : 2 (d) 1 : 4

2. एक त्रिभुज का परिमाण 24 मी और उसके आन्तरिक वृत्त की परिधि 44 मी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (a) 42 मी<sup>2</sup> (b) 24 मी<sup>2</sup> (c) 48 मी<sup>2</sup> (d) 84 मी<sup>2</sup>

3. एक अर्धवृत्ताकार पार्क में बाड़ लगाने के लिए 288 मी रेलिंग की आवश्यकता है। पार्क का क्षेत्रफल बताएँ।  $(\pi = \frac{22}{7})$

- (a) 6589 मी<sup>2</sup> (b) 4928 मी<sup>2</sup>  
 (c) 8956 मी<sup>2</sup> (d) 9856 मी<sup>2</sup>

4. एक बस के पहिए (डाइविंग व्हील) की त्रिज्या 35 सेमी है। 33 किमी प्रति घण्टा की गति बनाए रखने के लिए पहिए को प्रति मिनट कितनी बार घूमना पड़ेगा?

- (a) 350 (b) 250 (c) 200 (d) 150

5. एक समबाहु त्रिभुज और एक सम षट्भुज का परिमाण एकसमान है। तदनुसार उस त्रिभुज तथा षट्भुज के क्षेत्रफलों का अनुपात कितना होगा?

- (a) 3 : 2 (b) 2 : 3 (c) 1 : 2 (d) 1 : 4

6. एक त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 12 सेमी, 8 सेमी तथा 6 सेमी हैं। सबसे बड़ी भुजा के सामने के शीर्ष से खींची गई माध्यिका की लम्बाई होगी

- (a)  $\sqrt{14}$  सेमी (b)  $\sqrt{10}$  सेमी  
 (c)  $15\sqrt{2}$  सेमी (d)  $\sqrt{20}$  सेमी

7. एक आयताकार बाग की एक भुजा 15 सेमी तथा इसके विकर्ण की लम्बाई 20 सेमी है, तो आयताकार बाग का क्षेत्रफल है

- (a)  $50\sqrt{7}$  वर्ग सेमी (b)  $100\sqrt{7}$  वर्ग सेमी  
 (c)  $75\sqrt{7}$  वर्ग सेमी (d)  $70\sqrt{5}$  वर्ग सेमी

8. एक वर्ग व आयत का परिमाण बराबर है। यदि आयत का परिमाण 128 सेमी हो तथा आयत की चौड़ाई उसकी लम्बाई की एक-तिहाई हो, तो वर्ग का क्षेत्रफल है

- (a) 1024 वर्ग सेमी (b) 1124 वर्ग सेमी  
 (c) 1204 वर्ग सेमी (d) 1214 वर्ग सेमी

9. एक आयताकार मैदान 161 मी लम्बा तथा 136 मी चौड़ा है। इस मैदान के चारों ओर एक मार्ग बना है। मार्ग का कुल क्षेत्रफल 1204 वर्ग मी है। मार्ग की चौड़ाई है

- (a) 1 मी (b) 5 मी (c) 2 मी (d) 5.5 मी

10. एक 5.44 मी लम्बे तथा 3.74 मी चौड़े कमरे के फर्श पर वर्गाकार टाइलें लगनी हैं। इसके लिए कम-से-कम आवश्यक टाइलों की संख्या है

- (a) 176 (b) 184 (c) 162 (d) 192

11. एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज जिसका कर्ण 12 सेमी है, उसका क्षेत्रफल है

- (a) 32 वर्ग सेमी (b) 36 वर्ग सेमी  
 (c) 40 वर्ग सेमी (d) 45 वर्ग सेमी

12. एक पहिए का व्यास 1.26 मी है। 500 चक्करों में पहिए द्वारा तय की गई दूरी है

- (a) 2530 मी (b) 1980 मी (c) 1492 मी (d) 2880 मी

13. किसी वृत्त की त्रिज्या में 30% कमी करने पर इसके क्षेत्रफल में प्रतिशत कमी होगी

- (a) 30% (b) 60% (c) 45% (d) ये सभी

14. एक ही माप (1 सेमी त्रिज्या वाले) के तीन सिक्के एक मेज पर इस प्रकार रखे गए हैं, कि वे एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं। सिक्कों द्वारा उनके बीच घेरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा

- (a)  $\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\right)$  वर्ग सेमी (b)  $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$  वर्ग सेमी  
(c)  $\left(2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$  वर्ग सेमी (d)  $\left(3\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$  वर्ग सेमी

15. दो त्रिभुजों के आधारों का अनुपात  $x:y$  है तथा उनके क्षेत्रफलों का अनुपात  $a:b$  है, तब उनके संगत शीर्ष-लम्बों का अनुपात होगा

- (a)  $\frac{a}{x} : \frac{b}{y}$  (b)  $ax : by$  (c)  $\frac{a}{y} : bx$  (d)  $\frac{x}{a} : \frac{b}{y}$

16.  $2\sqrt{3}$  सेमी भुजा वाले समषट्भुज का क्षेत्रफल होगा

- (a)  $18\sqrt{3}$  वर्ग सेमी (b)  $12\sqrt{3}$  वर्ग सेमी  
(c)  $36\sqrt{3}$  वर्ग सेमी (d)  $27\sqrt{3}$  वर्ग सेमी

17. 28 सेमी की भुजा वाले वर्ग के भीतर बनाए जा सकने वाले सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल क्या होगा?

- (a) 17248 वर्ग सेमी (b) 784 वर्ग सेमी  
(c) 8624 वर्ग सेमी (d) 616 वर्ग सेमी

उत्तरमाला

1.	(c)	2.	(d)	3.	(b)	4.	(b)	5.	(b)	6.	(a)	7.	(c)	8.	(a)	9.	(c)	10.	(a)
11.	(b)	12.	(b)	13.	(d)	14.	(b)	15.	(a)	16.	(a)	17.	(d)						

संकेत एवं हल

1. परिमाणों का अनुपात =  $\sqrt{\text{क्षेत्रफलों का अनुपात}}$   
 $= \sqrt{1} : \sqrt{4} = 1 : 2$

2. यदि त्रिभुज की आन्तरिक त्रिज्या  $r$  हो, तब  $2\pi r = 44$   
 $\Rightarrow r = \frac{44}{2\pi} = 7$  मी

सूत्र  $r = \frac{\Delta}{s}$  से,  $\Delta = 7 \times \frac{24}{2} = 7 \times 12 = 84$  मी<sup>2</sup>

3. यदि अर्द्धवृत्ताकार पार्क की त्रिज्या  $r$  हो, तो

$$\pi r + 2r = 288 \Rightarrow (\pi + 2)r = 288$$

$$\Rightarrow \left(\frac{22}{7} + 2\right)r = 288 \Rightarrow r = \frac{288 \times 7}{36} = 56$$
 मी

$$\therefore \text{पार्क को क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 56 \times 56 = 4928$$
 मी<sup>2</sup>

4. पहिए द्वारा एक चक्कर में चली गई दूरी =  $2\pi r$   
 $= 2 \times \frac{22}{7} \times 35 = 220$  सेमी

पहिए की गति = 33 किमी/घण्टा

$$\therefore 1 \text{ मिनट में चली गई दूरी} = \frac{33 \times 100000}{60} = 55000$$

$$\therefore \text{अभीष्ट चक्करों की संख्या} = \frac{55000}{220} = 250$$

5. माना समबाहु त्रिभुज की भुजा  $a$  तथा समषट्भुज की एक भुजा  $b$  है। प्रश्नानुसार,

समबाहु त्रिभुज का परिमाण = समषट्भुज का परिमाण  $3a = 6b$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \text{उनके क्षेत्रफलों का अनुपात} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} b^2} = \frac{4}{6} = 2 : 3$$

8. माना वर्ग की भुजा =  $x$  सेमी  $\therefore 4x = 128 \Rightarrow x = 32$  सेमी

$$\therefore \text{वर्ग का क्षेत्रफल} = x^2 = (32)^2 = 1024$$
 वर्ग सेमी

12. पहिए का व्यास = 1.26 मी

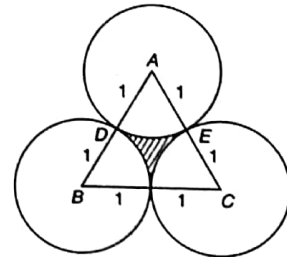
$$\text{पहिए की परिधि} = \pi \times \text{व्यास} = \frac{22}{7} \times 1.26 = 3.96$$
 मी

$$500 \text{ चक्करों में पहिए द्वारा तय की गई दूरी} = 3.96 \times 500 = 1980$$
 मी

14.  $\Delta ABC$  का क्षेत्रफल =  $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$  वर्ग सेमी

रेखांकित भाग का क्षेत्रफल

$$= \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} - 3 \times (\text{त्रिज्यखण्ड ADE का क्षेत्रफल})$$



$$= \sqrt{3} - \frac{3 \times \pi (1/2)^2 \times 60^\circ}{360^\circ} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$
 वर्ग सेमी

15. माना त्रिभुजों के शीर्षलम्ब क्रमशः  $h_1$  व  $h_2$  हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y}\right) \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{ay}{bx}$$

$$\Rightarrow h_1 : h_2 = ay : bx = \frac{a}{x} : \frac{b}{y}$$

16. समषट्भुज का क्षेत्रफल =  $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times 3 = 18\sqrt{3}$$
 वर्ग सेमी

17. अभीष्ट क्षेत्रफल =  $\frac{\pi \times (28)^2}{4} = \frac{22}{7} \times \frac{28 \times 28}{4} = 616$  वर्ग सेमी